

類推的ずらしを用いた数学の問題解決における適応過程の 分析と考察

丸山 圭貴・中川 裕之

Analysis and Discussion of the Adaptation Process in
Mathematical Problem Solving Using Analogical
Modification

MARUYAMA, Keiki and NAKAGAWA, Hiroyuki

大分大学教育学部研究紀要 第44巻第2号

2023年3月 別刷

Reprinted From

RESEARCH BULLETIN OF THE

FACULTY OF EDUCATION

OITA UNIVERSITY

Vol. 44, No. 2, March 2023

OITA, JAPAN

類推的ずらしを用いた数学の問題解決における適応過程の 分析と考察

丸 山 圭 貴*・中 川 裕 之**

【要 旨】 本稿では類推における写像内容の適応過程を明らかにすることを目的とした。そこで現代美術における類推的ずらしを用いた創造プロセスから、類推的ずらしを用いて問題解決過程を分析する研究枠組みを作成し、類題を解く際の適応の過程とその様子を探った。その結果、既存の問題の解法で問題を解決できないと判断すると抽象化した解法から新たな問題の解法を生成して適応すること、新しい問題の解法で問題を解決可能と判断すると抽象化した解法を変容させることも示唆された。

【キーワード】 数学 問題解決 類推 写像 適応 類推的ずらし

I 研究の背景と目的

数学における問題解決の場面では、問題を解く際に「似た問題と同じように解くことはできないか」と考え、その解法を当てはめることで解決に至る場面が存在する。このように2つの対象の類似性に着目し、既知の問題での解法を未知の問題へ当てはめて考える推論を類推という(中川, 2019)。類推では既知の問題をベース、未知の問題をターゲット、ベースの解法をターゲットに当てはめることを写像と呼ぶ。

類推は「ベースの検索」、「写像」、「ターゲットの表象の生成」、「正当化」、「学習」という5つのサブプロセスによって行われる(鈴木, 2020)(図1)。

しかし、Novick & Holyoake (1991)は、類推のサブプロセスの1つである「写像」に関して、ベースの解法をターゲットにそのまま当てはめるだけでは不十分であると指摘している。例えば、長方形の対角線の長さの証明(ベース)から、直方体の対角線の長さの証明(ターゲット)を類推する場面を考える。ベースでは対角線を2本引き、三角形の合同条件を用いることで長方形の対角線の長さが等しいことを証明する。しかし、直方体の対角線の長さを考える場面では、引く対角線の本数を2本から4本というように写像内容を変更することで対角線が等長であると証明する。このように類推において写像を行う際には写像内容を変更する必要があると分かる。このような変更はベースとターゲットが完全には同一でないことが要因であり

令和4年10月28日受理

*まるやま・けいき 大分大学教職大学院教育学研究科教職開発専攻

**なかがわ・ひろゆき 大分大学教育学部理数教育講座

(寺尾・楠見, 1998), 写像が単なる当てはめでは不十分であることを示している。ターゲットに合わせて写像内容を変更する手続きを適応と呼ぶ。

数学の授業内においても類推は多く用いられている。例題を学習したのちに練習問題を解く場面では、生徒は例題がベースとして、ターゲットである練習問題に例題の解法を当てはめて解決する。しかし、実際は問われ方や問題の要素などが変化するなど、例題との類似度が低くなると問題を解決できない生徒を多く見かける。これは、類推における適応が容易なことではないことを示しているといえる。そして、類推における適応が生徒の頭の中でどのように行われるのかについての研究はまだ少ない。

以上のような背景から類推における適応の様子を解明することでより難しい問題や類似度が低い問題の解決やそれを促す学習指導法につながると考える。そこで、本稿では、類推におけるベースからターゲットへの写像内容の適応過程に着目し、その様相を明らかにすることを目的とする。

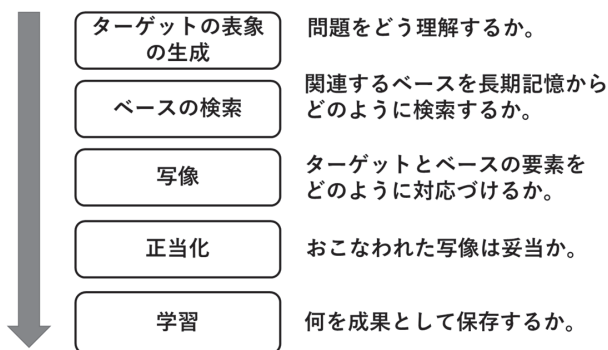


図1 類推の5つのサブプロセス (鈴木宏昭 (2020))

II 適応と類推的ずらし

岡田ら (2007) は適応に似たものとして、創造のための類推である「類推的ずらし (analogical modification)」が存在すると述べている。類推的ずらしとは、ベースの構造の一部を変更しながら写像することによって、新たなターゲットを生成する認知操作である。類推的ずらしはベースの構造を抽出し、ターゲットに写像するという点で類推の枠組みを踏襲しているといえる。さらに、類推的ずらしは新しい対象を創造するために、もとの構造のいくらかを柔軟に変更する必要があるという意味で類推における適応と共通点があるといえる (岡田ら, 2009)。ここでいう構造は写像内容と同じ意味である。

岡田ら (2007) は創造の文脈における類推的ずらしの利用方法に①「主題ずらし」、②「構造ずらし」、③「概念ずらし」の3種類があること明らかにした。①「主題ずらし」は、同じ構造の技法を主題に当てはめる操作である。②「構造ずらし」は複数の技法に共通するある程度抽象的な上位概念に沿って新しい構造 (表現技法) を生成する操作である。③「概念ずらし」とは、新たに生成した表現技法から新しい上位概念を生成する操作である (図2)。

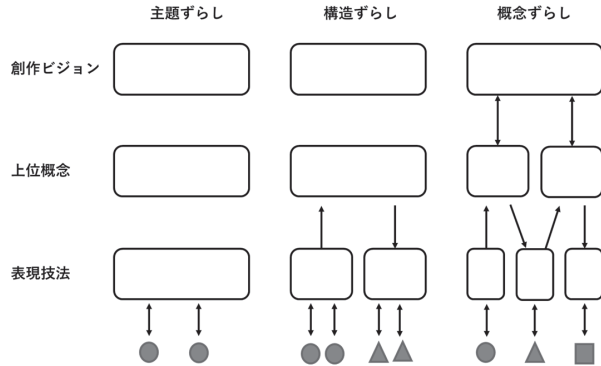


図2 類推的ずらしの3つの利用方法 (岡田ら (2007))

ここでの創作ビジョンとは創作過程の根底にある長期的な創作意図や目標を表す。上位概念とは具体例の共通点を持つ抽象的な概念であり、表現技法とは作品制作に用いられる技術や方法を表している。

類推的ずらしの3つの利用方法について、芸術家による作品創造のプロセスを例にして説明する。図3は芸術家の小川信治の作品展開の様子を表したものである。小川は作品展開の初期に「中心人物を消す」という表現技法を様々な主題に当てはめることで「without you」という作品シリーズを生み出している。これは同じ表現技法を当てはめて作品を作っているという点から①「主題ずらし」にあたる。次に、小川は「対称の意味を消す」という同一の上位概念のもと、表現技法を「中心人物を消す」から「対象を2つに増やす」というように変えることで、「perfect world」という新たな作品シリーズを生み出している。これは同一の上位概念から新たな表現技法を生み出しているという点で②「構造ずらし」にあたる。その後、表現技法を生み出していく中で上位概念が「対称の意味を消す」から「連続性」へと変わり、また新しい表現技法や作品を生み出していった。その際に新しい上位概念は創作ビジョンという大きな目標に沿った形で変わる。これは新しい表現技法にあわせて上位概念を新たに生み出しているという点で③「概念ずらし」にあたる。このように類推的ずらしは新しい作品や目標を生み出すことが求められる創造の文脈においては有効な手法であるといえる。

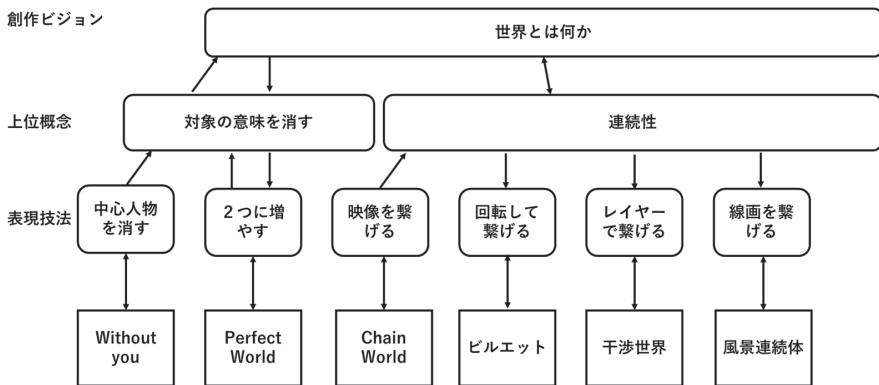


図3 小川信治の作品展開の様子 (岡田ら (2007))

岡田ら(2019)は、類推的ずらしが創作活動のような創造の文脈においては有効であることを示しているが、数学のような問題解決の文脈においては言及していない。そこで、岡田ら(2007)が示す類推的ずらしの3つの利用方法を用いて問題解決過程を分析できれば、類推における適応過程を明らかにすることができると思われる。以上のことから類推的ずらしの枠組みを用いて問題解決の文脈における類推の適応過程を明らかにしていく。

Ⅲ 問題解決の文脈における類推的ずらし

岡田ら(2009)が考案する類推的ずらしは「創作ビジョン」、「上位概念」、「表現技法」の3つの要素から成り立っている。これらは、創造の文脈に合わせたものであり、問題解決の文脈で扱うにあたって対応するものに変更する必要がある。よって、上記の3つの要素に対応するものを説明する。

まず、表現技法は「中心人物を消す」や「2つに増やす」といった作品に直接当てはめる内容を表している。これはターゲットに直接当てはめる内容という点で類推における写像内容と対応しており、数学の問題解決においてはターゲットに当てはめる「問題の解法」にあたる。

次に上位概念について考える。上位概念とは表現技法から抽出された抽象的な概念である。例えば、「中心人物を消す」や「2つに増やす」といった表現技法からは「対称の意味を消す」といった上位概念が抽出される。類推における、抽象的な概念としては、鈴木(2020)が提案する「抽象化」がある。これは、ベースとターゲットという異なる2つの対象を同一視するために、対象同士の本質的な部分を抽出したカテゴリーの一部であると認識することである(鈴木, 2020)。例えば、猫Aと猫Bは異なる猫であるため様々な点で異なっているが、「猫」というカテゴリーにおいて同一視することができ、写像可能な要素を決めることができる。このように、抽象化はベースとターゲットから抽出された抽象的な概念という点で、創造の文脈における上位概念と一致しているといえる。前述したように上位概念は表現技法の抽象的な概念であるため、問題解決の文脈においては「問題の解法」を抽象化したものである必要がある。よって、上位概念に対応する要素として、「問題の解法」をより抽象的に捉えた「抽象化した解法」とする。

次に創作ビジョンについて考える。鈴木(2020)は、特に人が行う抽象化を「準抽象化」と呼び、その特徴を「ゴールを意識したものとなっている」とした。創作ビジョンは上位概念があらぬ方向へ飛躍しないようにする特徴を持っており、「創作ビジョン」と抽象化におけるゴールの設定の役割は類似しているといえる。よって、創作ビジョンに対応する要素は数学の問題解決における「問題のゴール」にあたるものとする。

問題解決の文脈における類推的ずらしの利用方法について、対応する3つの利用方法を説明する。それは、「類推」、「解法ずらし」、「抽象化ずらし」の3つである。

まず、「類推」とは、ベースでの解法をターゲットへそのまま当てはめて解決することである。解法をそのまま写像しており、大きくずらしを行っていないため枠組みの基本形として類推と呼ぶ。これは同一の解法(表現技法)を当てはめているという点で①主題ずらしに対応している。

次に、「解法ずらし」とは、ベースでの解法がそのままターゲットへ写像できなかった場合に一度抽象化した解法へと上がり、新たな問題の解法を生成し写像を行うことである。これは同

一の上位概念から新たな解法（表現技法）を生成するという点で②の構造ずらしに対応しているといえる。

最後に、「抽象化ずらし」とは解法ずらしを行う中で新たに生成された問題の解法から、抽象化した解法を変容させることである。これは新しい解法（表現技法）から上位概念を変容させているという点で③の概念ずらしに対応しているといえる。

また、適応とは問題に合わせて写像内容を変えることであるため、この3つの利用方法のうち「解法ずらし」と「抽象化ずらし」が適応にあたる。

創造の文脈における類推的ずらしは作品の生成が目的であり、必要に応じて製作者が任意で表現技法や上位概念のずらしを行う。対して、問題解決の文脈における類推的ずらしは問題の解決が目的であるため、問題の解法が問題に写像できないといった困難に直面した際に適応が起こると予想される。

以上の内容を踏まえて、問題解決における類推的ずらしを用いた枠組みを図4のものとする。

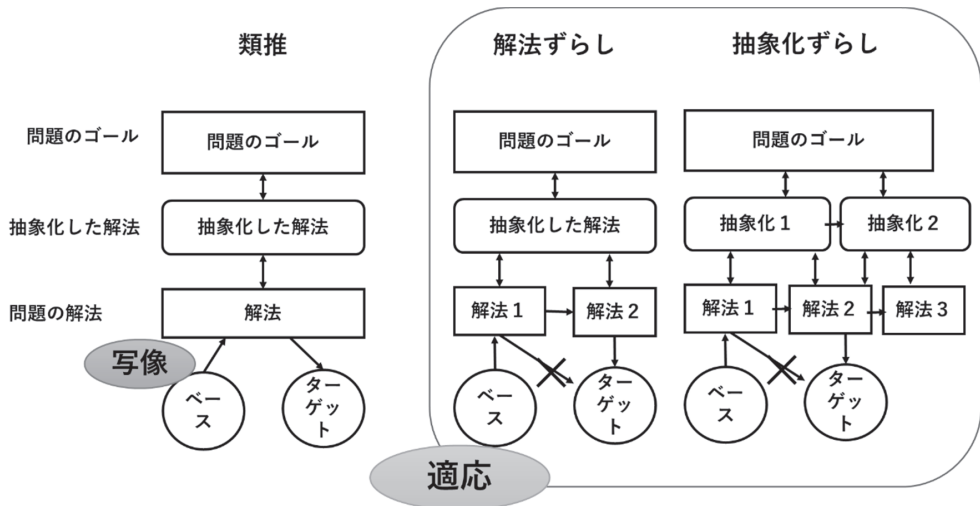


図4 問題解決における類推的ずらしの利用方法

IV 事例研究

図4の枠組みを用いて類推の適応過程の様子を観察する。調査内容は、被験者に事前に用意した数学の問題4間に取り組んでもらい、問題に取り組んでいる様子をビデオカメラで撮影、1問解き終わるごとにヒアリングを行う形式で実施した。取り組んでもらった問題用紙は回収し、解答用紙と動画から調査対象の思考過程を整理・分析・考察を行った。調査対象は大学生1名(H)と大学生1名(T)の計2名であり、2021年9月に行った。

調査問題は次の4つである。(図は省略)

問題 1: 次の図形は、正方形から 4 分割した 1 つの図形を切り取った図形です。この図形を 4 つの合同な図形に分割してください。(図 5, 10 参照)

問題 2: 次の図形は、正三角形から 4 分割した 1 つの図形を切り取った図形です。この図形を 4 つの合同な図形に分割してください。(図 6, 11 参照)

問題 3: 次の図形は、3 つの角が 30° , 60° , 90° である直角三角形と正三角形を組み合わせた図形です。この図形を 4 つの合同な図形に分割してください。(図 7, 12 参照)

問題 4: 次の図形は、正方形 5 個を組み合わせた図形です。この図形を 4 つの合同な図形に分割してください。(図 8, 13 参照)

どの問題も図形を合同な図形に 4 分割する問題である。4 つの問題はどれも 4 つの合同な図形に分割することがゴールであり、前問題の解法を参照しながら類推を用いて問題解決が行われると考えた。

(1) H の解決過程の実際

問題 1 を知っており解答を記述した。

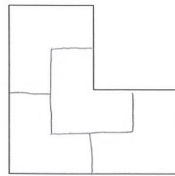


図 5 H の問題 1 の解答

問題 2 では、もとの図形である正方形を 4 分割してできた $1/4$ の大きさの正方形をさらに 4 分割し、 $1/16$ の大きさの正方形を作った。その後、 $1/4$ の正方形から $1/16$ の正方形を 1 つずつ負担するという操作を行い、解答を得た。

H1: この問題を見て、① $1/4$ を取った図形という点でこっちの正方形 (問題 1) と一緒と思ったので、1 回こっち (問題 1) に戻りました。

H2: 下に図を描いたんですけど、この正方形のときに書いた形が無くなった $1/4$ の図形をさらに 4 分割して、② $1/16$ ずつ $1/4$ から負担しているなど思ったので、 $1/16$ を $1/4$ で負担するという風に考えました。

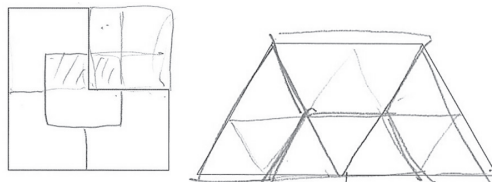


図 6 H の問題 2 の解答

問題 3 では、まず、図形に欠けている直角三角形を書き込んだ。次に、正三角形の頂点から縦に線を引き、正三角形を直角三角形 2 つに分けた。直角三角形をそれぞれ 4 等分し、 $1/16$ の大きさの直角三角形 12 個に分割した。 $1/16$ の直角三角形を $1/4$ の直角三角形から 1 つずつ負担するという操作を行って分割方法を考えるがうまくいかなかった。その後、 $1/16$ の大きさの直角三角形が 12 個あることから、 $12 \div 4$ を行い、直角三角形を 3 つ組み合わせようとしていた。しかし、組み合わせが複数現れてうまく行かなかった。そこで、正三角形の分割線の向きを変えたところ、複数の組み合わせの中にあつた台形が見えたことから、これを敷き詰めようとして解答を得ていた。

H3: 最初は、③さっきと同じように、まずこの図形がさっきやった 2 つの問題と同じように 4 等分された中から 1 つ取り除いた図形という風に見ました。そうすると $1/4$ をさらに分けた $1/16$ を $1/4$ から引いたらいいのかなと考えたんですけど、考えられる形が 3 つあり、うまくいかなかったので、そもそもこの図形（正三角形）の区切り方が間違っているんじゃないかなと思いました。

H4: ずっと正三角形を自分から見て縦に線を入れる分割を考えてたんですけど、他の分割ということで斜めに線を入れました。

H5: ここからがさっきまでの $1/4$ から $1/16$ を引く流れと変わるんですけど、分割の仕方を変えたことでできる新しい形に色々線を入れて考えていったときに正三角形に直角三角形をくっつけた形が分割数を変えたことでも新しく出る形かなと思い、これを敷き詰められないか考えました。

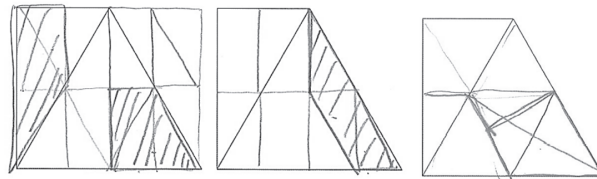


図 7 H の問題 3 の解答

問題 4 では $1/4$ の大きさの正方形をそれぞれ 4 分割し、もとの図形を $1/16$ の正方形 20 個に分割した。そして、もとの図形と相似な図形を敷き詰めることで解答を得た。

H6: さっきまでと流れが違うんですけど、これを解いているときに頭を過つた考えとして分割した形がもとの相似な形になるんじゃないかと考えていて、さっきの図形を振り返ると相似な図形で分割していたため、こっち（問題 4）も相似な形に分解できないか考えました。

図 8 H の問題 4 の解答

